Introducción a la lógica continua para estructuras métricas

L. Pedro Poitevin

Índice

1. Preliminares **3**

2. Estructuras métricas **6**

3. Lenguaje para estructuras métricas **7**

4. Fórmulas y sus interpretaciones **8**

5. Pre-estructuras **9**

6. Semántica **11**

7. Conceptos de teoría de modelos **14**

8. Ultraproductos para estructuras métricas **15**

9. Ultraproductos de funciones **16**

10. Saturación **17**

11. Espacio de tipos **18**

12. La topología lógica **18**

13. Eliminación de cuantificadores **19**

14. Estabilidad **19**

15. Estructuras métricas (varias suertes) **19**

16. Axiomas para retículos de Banach **21**

17. Retículos de Banach L_p **23**

18. Análisis y probabilidades **24**

19. Teoría de modelos de los retículos de Banach L_p **24**

20. Retículos de Orlicz **25**

21. Axiomas para retículos de Orlicz con la condición Δ_2^k **26**

Introducción

Estas son las notas de clase del cursillo del mismo nombre dictado durante la Segunda Escuela de Verano de Matemáticas en la Universidad Sergio Arboleda, en la magnífica ciudad de Bogotá, Colombia. La transcripción de estas notas ha sido el trabajo de Bibiana Patiño y Paola Lizarralde, para con quienes el autor está muy agradecido.

El principal propósito de estas notas es el proveer una introducción cuidadosa a algunos aspectos fundamentales de la lógica continua para estructuras métricas. En particular, durante el cursillo el autor tomó la decisión de prestar énfasis al tema de la axiomatizibilidad de clases de estructuras métricas.

Hay un resultado profundo de la lógica de primer orden que subyace al desarrollo de muchas de las ideas fundamentales de la lógica continua. Dicho resultado, el llamado Teorema de Keisler-Shelah, establece que una clase de estructuras es axiomatizable si y sólo si es cerrada bajo isomorfismos, ultraproductos y ultrarraíces. El mismo enunciado resulta ser verdad en el caso de la lógica continua, pero las nociones de isomorfismo, ultraproducto y ultrarraíz cambian sutilmente de significado, para ser adaptadas de manera adecuada al carácter no discreto de las estructuras a las que se las aplica. La demostración del Teorema de Keisler-Shelah en el contexto de la lógica continua aparece por primera vez en el tratado de Ward Henson y José Iovino [4].

En el curso de estas notas, el lector podrá constatar que proveer de una lista exhaustiva de axiomas para una clase particular de estructuras métricas puede resultar un tanto más complicado de lo que suele ser el caso con clases elementales de primer orden. De hecho, el texto concluye con un ejemplo de una clase de estructuras métricas—a saber, los espacios de Nakano con rango esencial fijo—cuya axiomatizibilidad en la lógica continua fue por primera vez establecida utilizando el criterio de Keisler-Shelah arriba mencionado. La demostración de la axiomatizabilidad de dicha clase está fuera del alcance de estas notas, y al lector interesado se le remite a [5] y a [1]. El lector versado en análisis funcional haría bien en leer también [6].

Si bien ésta es una invitación detallada a la lógica continua, el contenido de estas notas es sumamente incompleto. La esperanza del autor es que los lectores interesados se valgan de los detalles de este cursillo para proceder a la lectura dedicada y cuidadosa de la introducción definitiva a la lógica continua, el tratado de Ben Yaacov, Berenstein, Henson y Usvyatsov [2].

1. Preliminares

Asumimos que el lector está familiarizado con los fundamentos de los espacios métricos.

Si (M, d) es un espacio métrico, decimos que (M, d) es *acotado* si existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $d(x, y) \leq B$ para todo $x, y \in M$. El *diámetro* de (M, d) es el mínimo B que cumple la condición anterior.

Pese a que las aplicaciones más interesantes de la lógica continua para estructuras métricas tienen lugar en el contexto de espacios métricos no acotados, es conveniente desarrollar dicha lógica con la restricción de que todos los espacios métricos a considerarse son acotados. Más adelante ilustraremos por qué dicha restricción no nos impide estudiar estructuras métricas no acotadas.

Un *módulo de continuidad uniforme* es simplemente una función $\Delta : (0, 1] \to (0, 1]$. Si (M, d) y (M_0, d_0) son espacios métricos y $f : M \to M_0$ es una función arbitraria, decimos que $\Delta : (0, 1] \to (0, 1]$ es un *módulo de continuidad uniforme para* f si para todo $\epsilon \in (0, 1]$ y para todo $x, y \in M$ tenemos que

$$d(x, y) < \Delta(\epsilon) \Longrightarrow d_0(f(x), f(y)) \leq \epsilon. \tag{CU}$$

Nótese que f es uniformemente continua si y sólo si tiene un módulo de continuidad uniforme.

Ejercicio 1.1. *Sean M y M' espacios métricos, y sea $f : M \to M'$ una función uniformemente continua con módulo de continuidad uniforme Δ. Si (CU) es válida para un subconjunto de pares (x, y) denso en $M \times M$, entonces (CU) es válida para todo $(x, y) \in M \times M$.*

Ejercicio 1.2. *Sean M y M' espacios métricos, y sean $\bar{M}$ y $\bar{M}'$ las compleciones de M y M', respectivamente. Si $f : M \to M'$ es una función uniformemente continua con módulo de continuidad uniforme Δ, entonces existe una única extensión $\bar{f} : \bar{M} \to \bar{M}'$ de f que es continua. Más aún, dicha extensión es uniformemente continua, y Δ es un módulo de continuidad uniforme para dicha extensión.*

Nota. Sean (M_i, d_i) espacios métricos para $i = 1, ..., n$, y sea $M = M_1 \times ... \times M_n$. M estará siempre dotado de la métrica del máximo, definida para $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ por $d(x, y) = max\{d_i(x_i, y_i)|i = 1, ..., n\}$.

Proposición 1.3. *Sean M, M', M'' espacios métricos (con métricas d, d', d'', respectivamente) y sean $f : M \to M'$ y $f' : M' \to M''$ funciones uniformemente continuas. Supóngase que Δ es un módulo de continuidad uniforme para f y Δ' es un módulo de continuidad uniforme para f'. Entonces la composición $f' \circ f$ de f con f' es uniformemente continua, con módulo de continuidad uniforme $\Delta(r\Delta')$ para $r \in (0, 1)$ arbitrario.*

Demostración. Sean $x, y \in M$. Entonces $d(x, y) < \Delta(r\Delta'(\epsilon))$ implica que

$$d'(f(x), f(y)) \leq r\Delta'(\epsilon) < \Delta'(\epsilon),$$

y desde luego ello a su vez implica que $d''(f'(f(x)), f'(f(y))) \leq \epsilon$. □

Definición 1.4. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos, y sean $f, f_n : M \to M'$. Decimos que $(f_n \mid n \geq 1)$ converge uniformemente a f, y lo abreviamos $f_n \xrightarrow{u} f$ en M si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N > 0 \ \forall n > \mathbb{N} \ \forall x \in M \ \ (d'(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon.$$

Proposición 1.5. *Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos y $f, f_n : M \to M'$ como arriba descritas, y supóngase que $f_n \xrightarrow{u} f$. Si f_n es uniformemente continua para cada $n \geq 1$, entonces f también es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $N : (0, 1] \to \mathbb{N}$ definida de forma que;

$$\forall \epsilon > 0 \ \forall n > N(\epsilon) \ \forall x \in M \ \ (d'(f_n, f(x)) \leq \epsilon)$$

Para $\epsilon > 0$, defínase $\Delta : (0, 1] \to (0, 1]$ por medio de $\Delta(\epsilon) = \Delta_n(\frac{\epsilon}{3})$, donde $n = N(\frac{\epsilon}{3}) + 1$.

Sean $x, y \in M$. Si $d(x, y) < \Delta(\epsilon)$, entonces $d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(y)) + d'(f(y), f_n(y)) \leq \epsilon$. □

Definición 1.6. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos y $f : M \times M' \to \mathbb{R}$ una función acotada. Definimos nuevas funciones $\sup_y f$ e $\inf_y f$ funciones en $\mathbb{R}$ con dominio M de la siguiente manera:

$$(\sup_y f)(x) = \sup\{f(x, y) : y \in M'\}$$

$$(\inf_y f)(x) = \inf\{f(x, y) : y \in M'\}$$

para todo $x \in M$.

Proposición 1.7. *Sean M y M' espacios métricos y $f : M \times M' \to \mathbb{R}$ una función acotada y uniformemente continua, sea Δ un módulo de continuidad uniforme para f. Entonces $\sup_y f$ e $\operatorname{ínf}_y f$ son funciones acotadas y uniformemente continuas en $\mathbb{R}$ con dominio M y Δ es un módulo de continuidad uniforme para estas funciones.*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$, y sean $u, v \in M$ tales que $d(u,v) < \Delta(\epsilon)$. Entonces para todo $z \in M'$

$$f(v,z) \leq f(u,z) + \epsilon \leq (\sup_z f)(u) + \epsilon.$$

Tomando el supremo sobre $z \in M'$ en $f(u,z) + \epsilon$ se obtiene que

$$(\sup_z f)(v) \leq (\sup_z f)(u) + \epsilon.$$

Intercambiando u y v en el argumento anterior, tenemos que

$$|(\sup_z f)(u) - (\sup_z f)(v)| \leq \epsilon.$$

De manera análoga se obtiene el resultado para el $\operatorname{ínf}_z f$. □

Definición 1.8. Sean (M,d) un espacio métrico, S un conjunto índice no vacío equipado con la métrica discreta y $f : M \times S \to \mathbb{R}$ una función acotada tal que $f(x,s) = f_s(x)$, donde $f_s : M \to \mathbb{R}$. Definimos nuevas funciones $\sup_s f_s$ e $\operatorname{ínf}_s f_s$ de M a $\mathbb{R}$ de manera que

$$(\sup_s f_s)(x) = \sup\{f(x,s) : s \in S\}$$

$$(\operatorname*{ínf}_s f_s)(x) = \operatorname{ínf}\{f(x,s) : s \in S\}$$

para todo $x \in M$.

Proposición 1.9. *Sea S un conjunto índice no vacío. Sea M un espacio métrico y $f_s : M \to [0,1]$ una función uniformemente continua para cada $s \in S$. Sea Δ un módulo de continuidad uniforme para toda $f_s, s \in S$. Entonces $\sup_s f_s$ e $\operatorname{ínf}_s f_s$ son uniformemente continuas de M a $[0,1]$ y Δ es un módulo de continuidad uniforme para ambas.*

Demostración. Consideremos a S como un espacio métrico dotado con la métrica discreta y $f : M \times S \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente manera: $f(x,s) = f_s(x)$. Sea $\epsilon > 0$ y $u, v \in M$ tal que $d(u,v) < \Delta(\epsilon)$. Entonces para todo $s \in S$ ocurre lo siguiente:

$$f(v,s) \leq f(u,s) + \epsilon.$$

Esta última desigualdad se puede reescribir de la siguiente manera

$$f_s(v) < f_s(u) + \epsilon.$$

Tomando el supremo sobre $s \in S$ tenemos que

$$(\sup_s f_s)(v) \leq (\sup_s f_s)(u) + \epsilon.$$

Luego, intercambiando u y v en el argumento anterior, tenemos que

$$|(\sup_z f_s)(u) - (\sup_z f_s)(v)| \leq \epsilon.$$

El caso del $\operatorname{ínf}_s f_s$ es semejante. □

Definición 1.10. Decimos que (M_0, d_0) es un *espacio pseudométrico* si M es un conjunto no vacío y $d_0 : M_0 \times M_0 \to \mathbb{R}$ es una pseudométrica, es decir:

(i) $d_0(x, y) = d_0(y, x) \geq 0$

(ii) $d_0(x, x) = 0$

(iii) $d_0(x, z) \leq d_0(x, y) + d_0(y, z)$; para todo $x, y, z \in M_0$.

Definición 1.11. Sea (M_0, d_0) un espacio pseudométrico. Podemos definir una *relación de equivalencia* $\sim$ de la siguiente manera: $x \sim y \Leftrightarrow d_0(x, y) = 0$. De la desigualdad triangular se sigue que $d_0(x, y) = d_0(x', y')$ siempre que $x \sim x'$ y $y \sim y'$. Sea $M = M_0/\sim$ y sea $\pi : M_0 \to M$ la función cociente que asigna a $x \in M_0$ su clase de equivalencia $\pi(x) \in M$. Defínase $d : M \times M \to \mathbb{R}$ de manera que $d(\pi(x), \pi(y)) = d_0(x, y)$ para todo $x, y \in M_0$. Entonces (M, d) es un espacio métrico al que llamamos el *espacio métrico inducido* por (M_0, d_0).

Definición 1.12. Sean (M_0, d_0) y (M_0', d_0') espacios pseudométricos con espacios cociente (M, d), (M', d') y funciones cociente π y π', respectivamente, y sea $f_0 : M_0 \to M_0$. Decimos que f_0 es *uniformemente continua* con módulo de continuidad uniforme Δ si

$$d_0(x, y) < \Delta(\epsilon) \Rightarrow d_0'(f_0(x), f_0(y)) \leq \epsilon$$

para todo $x, y \in M$ y todo $\epsilon \in (0, 1]$.

Proposición 1.13. *Sean (M_0, d_0) y (M_0', d_0') espacios pseudométricos con espacios cociente (M, d) y (M', d'), y funciones cociente π y π', respectivamente, y sea $f_0 : M_0 \to M_0$ uniformemente continua con módulo de continuidad uniforme Δ. Definimos $f : M \to M'$ de manera que $f(\pi(x)) = \pi'(f_0(x))$ para todo $x \in M_0$. Entonces f es uniformemente continua con módulo de continuidad uniforme Δ.*

Demostración. Sea Δ un módulo de continuidad uniforme para f_0. Como $d(\pi(x), \pi(y)) = d_0(x, y) < \Delta(\epsilon)$, tenemos que

$$d'(f(\pi(x)), f(\pi(y))) = d'(\pi'(f_0(x)), \pi'(f_0(y))) = d_0'(f_0(x), f_0(y)) \leq \epsilon.$$

Así, f es uniformemente continua con módulo de continuidad uniforme Δ. $\square$

2. Estructuras métricas

Definición 2.1. Sean (M, d) un espacio métrico acotado y completo. Entonces

(a) Una *relación* en M es una función uniformemente continua $R : M^n \to [0, N]$ (para algún $N \geq 1$).

(b) Una *operación (o función)* en M es una función $f : M^n \to M$ uniformemente continua (para algún $n \geq 1$).

En ambos casos, la aridad de la función y de la relación es n.

Definición 2.2. Sea (M, d) un espacio métrico acotado y completo. Una *estructura métrica* $\mathfrak{M}$ basada en (M, d) consiste en una familia $(R_i \mid i \in I)$ de relaciones en M, una familia $(f_j \mid j \in J)$ de operaciones en M y una familia $(c_k \mid k \in K)$ de elementos distinguidos en M. A una estructura métrica se la denota por

$$\mathfrak{M} = (M, R_i, f_j, c_k \mid i \in I, j \in J, k \in K).$$

Ejemplos.

1. Un espacio métrico (M, d) acotado y completo sin estructura adicional.
2. Una estructura $\mathfrak{M}$ en el sentido usual de la lógica de primer orden, dotando al dominio de $\mathfrak{M}$ con la métrica discreta.
3. Sea (M, d) un espacio métrico completo no acotado con un elemento distinguido $a \in M$. Entonces podemos ver a (M, d) como una estructura multisurtida (polisurtida) con índice de suertes $\mathbb{N}$, donde la n-ésima suerte es $B_n(a) := \{x \in M \mid d(x, a) \leq n\}$. Las funciones inclusión $I_{mn} : B_m \to B_n$ $(m < n)$ deben ser funciones en $\mathfrak{M}$, con el fin de mantener en orden estas suertes.
4. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de probabilidad . Definimos una relación de equivalencia $\sim$ en Σ de la siguiente manera

   $$A \sim B \text{ si y sólo si } \mu(A \triangle B) = 0.$$

   Sea $M = \Sigma \sim$ y $d : M \times M \to \mathbb{R}$ definida como $d(x, y) = \mu(x \triangle y)$ donde tenemos una operación unaria ^{c}, dos operaciones binarias $\cup$ y $\cap$, y dos elementos distinguidos 0 y 1, donde $0 = [\emptyset]_\sim$, $1 = [\Omega]_\sim$.

3. Lenguaje para estructuras métricas

Definición 3.1. A cada estructura métrica $\mathfrak{M}$ le asociamos un lenguaje L que consiste en:

(i) Un símbolo de función f y un entero $\alpha(f)$, para cada función $f^{\mathfrak{M}}$; a cada $f^{\mathfrak{M}}$ se le asocia un módulo de continuidad uniforme $\Delta[f]$.

(ii) Un símbolo de relación P y un entero $\alpha(P)$ para cada función $P^{\mathfrak{M}}$; a cada $P^{\mathfrak{M}}$ asociamos un intervalo cerrado y acotado $I_P \subseteq \mathbb{R}$ y un módulo de continuidad uniforme $\Delta[P]$.

(iii) Un símbolo de constante c_a para cada elemento distinguido a en $\mathfrak{M}$.

(iv) Un número D_i que acota al diámetro de $\mathfrak{M}$.

(v) Un símbolo d que denota a la métrica asociada a $\mathfrak{M}$.

Si éste es el caso, decimos que $\mathfrak{M}$ *es una L-estructura.*

Convención: D_i=1, I_P=[0,1].

Definición 3.2. Sean $(M, d^{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{M}$ y $(N, d^{\mathfrak{N}}) = \mathfrak{N}$ dos estructuras métricas en un lenguaje común L. Una *inmersión* $T : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ es una isometría que satisface

(i) $f^{\mathfrak{M}}(T(a_1, ..., T(a_n))) = T(f^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n))$;

(ii) $c^{\mathfrak{M}} = T(c^{\mathfrak{M}})$;

(iii) $P^{\mathfrak{M}}(T(a_1, ..., T(a_n))) = P^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n)$

para todo símbolo de n-ario de función f, de relación P, y de constante c, para todo todo $a_1, ..., a_n \in M$.

Definición 3.3. Un *isomorfismo* es una inmersión sobreyectiva entre dos L-estructuras métricas. Escribimos $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{N}$ para expresar que existe un isomorfismo entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$. Un *automorfismo* de una estructura métrica $\mathfrak{M}$ es un isomorfismo entre $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$.

Definición 3.4. Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura métrica. Si existe una inmersión de $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$, entonces $\mathfrak{M}$ es una *subestructura* de $\mathfrak{N}$, y la escribimos $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$.

4. Fórmulas y sus interpretaciones

Sea L un lenguaje fijo para estructuras métricas, con $D_i = 1$ e $I_P = [0, 1]$ para todo símbolo de relación P en L. Los símbolos lógicos de L consisten en

1. El símbolo distinguido d, que formalmente equivale a un símbolo de relación binaria.
2. V_L, un conjunto infinito de variables.
3. *Conectivos n-arios. Un conectivo n-ario* se define como una función continua de $[0, 1]^n \to$ [0,1].
4. Dos cuantificadores sup e ínf.

Los símbolos no lógicos de L consisten en

1. Los símbolos de constante en L.
2. Los símbolos de función en L.
3. Los símbolos de relación en L.

Definición 4.1. Dado un lenguage L, se define el *conjunto de los L-términos* de forma inductiva:

(i) Una variable v_i es un L-término.

(ii) Una constante c_i es un L-término.

(iii) Si f es un símbolo de operación n-ario y $t_1, ..., t_n$ son L-términos, $f(t_1, ..., t_n)$ es un L-término.

Definición 4.2. Dado un lenguaje L se define el *conjunto de L-fórmulas* inductivamente de la siguiente manera:

(i) Si t_1 y t_2 son L-términos, la expresión $d(t_1, t_2)$ es una L-fórmula.

(ii) Si $t_1, ..., t_n$ son L-términos y P un símbolo de relación de aridad n, la expresión $P(t_1, ..., t_n)$ es una L-fórmula.

(iii) Si $u : [0, 1]^n \to [0, 1]$ es un conectivo n-ario y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ son L-fórmulas , la expresión $u(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ es una L-fórmula.

(iv) Si φ es una L-fórmula y $x \in V_L$, las expresiones $\sup_x \varphi$ e $\inf_x \varphi$ son L-fórmulas.

Notación. La notación $t(x_1, ..., x_n)$ indica que las variables con ocurrencias libres en t están contenidas en el conjunto $\{x_1, ..., x_n\}$. De igual manera ocurre con la notación $\varphi(x_1, ..., x_n)$.

Definición 4.3. Dado un lenguage L, se define el *conjunto de los L-términos* de forma inductiva:

(i) Una variable v_i es un L-término.

(ii) Una constante c_i es un L-término.

(iii) Si f es un símbolo de operación n-ario y $t_1, ..., t_n$ son L-términos, $f(t_1, ..., t_n)$ es un L-término.

Definición 4.4. Dado un lenguaje L se define el *conjunto de L-fórmulas* inductivamente de la siguiente manera:

(i) Si t_1 y t_2 son L-términos, la expresión $d(t_1, t_2)$ es una L-fórmula.

(ii) Si $t_1, ..., t_n$ son L-términos y P un símbolo de relación de aridad n, la expresión $P(t_1, ..., t_n)$ es una L-fórmula.

(iii) Si $u : [0, 1]^n \to [0, 1]$ es un conectivo n-ario y $\varphi_1, ..., \varphi_n$ son L-fórmulas , la expresión $u(\varphi_1, ..., \varphi_n)$ es una L-fórmula.

(iv) Si φ es una L-fórmula y $x \in V_L$, las expresiones $\sup_x \varphi$ e $\inf_x \varphi$ son L-fórmulas.

5. Pre-estructuras

Definición 5.1. Sea (M_0, d_0) un espacio pseudométrico con diámetro $\leq D_L$. Una *pre-estructura* en L consiste en lo siguiente:

(i) Para cada símbolo de relación P n-ario de L, una función $P^{\mathfrak{M}} : M_0^n \to I_P$ tal que Δ_P es un módulo de continuidad uniforme para $P^{\mathfrak{M}}$.

(ii) Para cada símbolo de función f n-ario de L, una función $f^{\mathfrak{M}} : M_0^n \to I_P$ tal que Δ_f es un módulo de continuidad uniforme para $f^{\mathfrak{M}}$.

(iii) Para cada símbolo de constante c de L, un elemento $c^{\mathfrak{M}} \in M_0$.

Definición 5.2. Dada una L-pre-estructura $\mathfrak{M}_0$ podemos formar su *pre-estructura cociente* $\mathfrak{M}$ de la siguiente manera: Sea (M, d) el espacio métrico cociente asociado a (M_0, d_0) y sea $\pi : M_0 \to M$ la función cociente. Entonces

(i) Para cada símbolo de relación P n-ario de L, $P^{\mathfrak{M}}(\pi(x_1), ..., \pi(x_n)) = P^{\mathfrak{M}_0}(x_1, ..., x_n)$ para cada $x_1, \ldots, x_n \in M_0$.

(ii) Para cada símbolo de función f n-ario de L, $f^{\mathfrak{M}}(\pi(x_1), ..., \pi(x_n)) = \pi(f^{\mathfrak{M}_0}(x_1, ..., x_n))$ para cada $x_1, \ldots, x_n \in M_0$.

(iii) Para cada símbolo de constante c de L, $c^{\mathfrak{M}} = \pi(c^{\mathfrak{M}_0})$.

Proposición 5.3. *Sean Δ_P y Δ_f módulos de continuidad uniforme para $P^{\mathfrak{M}_\circ}$ y $f^{\mathfrak{M}_\circ}$ respectivamente, entonces Δ_P y Δ_f son módulos de continuidad uniforme para $P^{\mathfrak{M}}$ y $f^{\mathfrak{M}}$.*

Demostración. **Δ_P es un módulo de continuidad uniforme para $P^{\mathfrak{M}_0}$:** Sea $\epsilon \in (0,1]$. Como

$$d(\pi(x_i), \pi(y_i)) = d_0(x_i, y_i)$$

para todo $i = 1, ..., n$, tenemos que

$$d((\pi(x_1), ..., \pi(x_n)), (\pi(y_1), ..., \pi(y_n))) = d_0((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) < \Delta_P(\epsilon).$$

Luego, como Δ_P es un módulo de continuidad uniforme para $P^{\mathfrak{M}_\circ}$, entonces

$$|P^{\mathfrak{M}}(\pi(x_1), ..., \pi(x_n)) - P^{\mathfrak{M}}(\pi(y_1), ..., \pi(y_n))| = |P^{\mathfrak{M}_\circ}(x_1, ..., x_n) - P^{\mathfrak{M}_\circ}(y_1, ..., y_n)| \leq \epsilon$$

Así, Δ_P es un módulo de continuidad uniforme para $P^{\mathfrak{M}}$.

Δ_f es un módulo de continuidad uniforme para $f^{\mathfrak{M}_0}$: Sea $\epsilon \in (0,1]$. Como

$$d(\pi(x_i), \pi(y_i)) = d_0(x_i, y_i)$$

para todo $i = 1, ..., n$, entonces

$$d((\pi(x_1), ..., \pi(x_n)), (\pi(y_1), ..., \pi(y_n))) = d_0((x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n)) < \Delta_f(\epsilon).$$

Luego, como Δ_f es un módulo de continuidad uniforme para $f^{\mathfrak{M}}$, entonces

$$\begin{aligned} d(f^{\mathfrak{M}}(\pi(x_1), ..., \pi(x_n)), f^{\mathfrak{M}}(\pi(y_1), ..., \pi(y_n))) &= d(\pi(f^{\mathfrak{M}_\circ}(x_1, ..., x_n)), \pi(f^{\mathfrak{M}_\circ}(y_1, ..., y_n))) \\ &= d_0(f^{\mathfrak{M}_\circ}(x_1, ..., x_n), f^{\mathfrak{M}_\circ}(y_1, ..., y_n)) \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Así, Δ_f es un módulo de continuidad uniforme para $f^{\mathfrak{M}}$.

□

Nota. Nótese que $P^{\mathfrak{M}}, f^{\mathfrak{M}}, c^{\mathfrak{M}}$ están bien definidas.

Finalmente, producimos una L-estructura $\mathfrak{N}$ al completar a $\mathfrak{M}$. Dicha L-estructura está basada en la compleción (N, d) de (M, d) y la estructura adicional se define de la manera natural:

(i) $P^{\mathfrak{N}} : N^n \to I_P$ es la única función continua que extiende a $P^{\mathfrak{M}} : M^n \to I_P$.

(ii) $f^{\mathfrak{N}} : N^n \to N$ es la única función continua que extiende a $f^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$.

(iii) $c^{\mathfrak{N}} = c^{\mathfrak{M}}$.

6. Semántica

Definición 6.1. Sea $\mathfrak{M}_0$ una L-pre-estructura basada en un espacio pseudométrico (M_0, d_0), y sea $A \subseteq M_0$. Extendemos L a un nuevo lenguaje $L(A)$ al añadirle un nuevo símbolo de constante $c(a)$ para cada $a \in A$. La interpretación de $c(a)$ en $\mathfrak{M}_0$ será simplemente a.

Definición 6.2. Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura. Dado un $L(M)$-término $t = t(x_1, ..., x_n)$, definimos la *interpretación de t en $\mathfrak{M}$*, denotada $t^{\mathfrak{M}}$, inductivamente de la siguiente manera:

(i) Si $t(x_1, ..., x_n) = c$ entonces $t^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$ está definido por $t^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_n) = c^{\mathfrak{M}}$.

(ii) Si $t(x_1, ..., x_n) = x_j$ entonces $t^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$ está definido por $t^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_n) = x_j$.

(iii) Si $t(x_1, ..., x_n) = f(t_1, ..., t_m)$, entonces $t^{\mathfrak{M}} : M^n \to M$ está definido por

$$t^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_n) = f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_n), ..., t_m^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_n)).$$

Definición 6.3. Para cada $L(M)$-sentencia σ, definimos el *valor de σ en $\mathfrak{M}$* inductivamente de la siguiente manera:

(i) $(d(t_1, t_2))^{\mathfrak{M}} = d^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, t_2^{\mathfrak{M}})$.

(ii) $(P(t_1, ..., t_n))^{\mathfrak{M}} = P^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}, ..., t_n^{\mathfrak{M}})$.

(iii) $(u(\sigma_1, ..., \sigma_n))^{\mathfrak{M}} = u(\sigma_1^{\mathfrak{M}}, ..., \sigma_n^{\mathfrak{M}})$, donde $u : [0,1] \to [0,1]$ es continua.

(iv) $(\sup_x \varphi(x))^{\mathfrak{M}} = \sup\{\varphi(a)^{\mathfrak{M}} \mid a \in M\} \subseteq [0,1]$

(v) $(\text{ínf}_x \varphi(x))^{\mathfrak{M}} = \text{ínf}\{\varphi(a)^{\mathfrak{M}} \mid a \in M\} \subseteq [0,1]$

Definición 6.4. Dada una fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ en $L(M)$. Definimos $\varphi^{\mathfrak{M}} : M^n \to [0,1]$ de la siguiente manera:

$$\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) = (\varphi(a_1, ..., a_n))^{\mathfrak{M}} = (\varphi(c(a_1), ..., c(a_n)))^{\mathfrak{M}}.$$

Teorema 6.5. *Para cada L-término $t(x_1, ..., x_n)$ y cada L-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$, hay funciones $\Delta_t, \Delta_\varphi : (0,1] \to (0,1]$ tales que*

$$d((a_1, ..., a_n), (a_1', ..., a_n')) < \Delta_t \Rightarrow d(t^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n), t^{\mathfrak{M}}(a_1', ..., a_n')) \leq \epsilon$$

y

$$d((a_1, ..., a_n), (a_1', ..., a_n')) < \Delta_\varphi \Rightarrow d(\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n), \varphi^{\mathfrak{M}}(a_1', ..., a_n')) \leq \epsilon$$

Demostración. Por inducción sobre los términos:

- Si $t(x_1, ..., x_n) = x_i$ definimos $\Delta_t(\epsilon) = \epsilon$ luego:

$$\begin{aligned} d((a_1, ..., a_n), (a_1', ..., a_n')) < \Delta_t(\epsilon) &\Rightarrow d(x_i, x_i') \leq \epsilon \\ &\Rightarrow d(t^{\mathfrak{M}}(a_1', ..., a_n'), t^{\mathfrak{M}}(a_1', ..., a_n')) \leq \epsilon \end{aligned}$$

- $t(x_1,...,x_n)=c$ definimos $\Delta_t(\epsilon)=1$ luego:

$$\begin{aligned} d((a_1,...,a_n),(a'_1,...,a'_n))<\Delta_t(\epsilon)=1 &\Rightarrow d(c^{\mathfrak{M}},c^{\mathfrak{M}})\leq\epsilon \\ &\Rightarrow d(t^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n),t^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n))\leq\epsilon \end{aligned}$$

- Si $t=f(t_1,...,t_m)$ y sean $\Delta_f,\Delta_{t_1},...,\Delta_{t_m}$ módulos de continuidad uniforme para $f,t_1,...,t_m$ respectivamente.

  Sea $r\in(0,1)$ y $\Delta_t(\epsilon):=\min\limits_{1\leq i\leq m}\Delta_{t_i}(r\Delta_f(\epsilon))$.

$$\begin{aligned} d((a_1,...,a_n),(a'_1,...,a'_n))<\Delta_t(\epsilon)\Rightarrow d(t_i^{\mathfrak{M}}(a_1,...,a_n),t_i^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n))\leq r\Delta_f(\epsilon)<\Delta_f(\epsilon) \\ \Rightarrow d(f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1,...,a_n),...,t_m^{\mathfrak{M}}(a_1,...,a_n)),f^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n),...,t_m^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n)))<\epsilon \end{aligned}$$

La segunda parte la probamos por inducción sobre las fórmulas:

- Supongamos que $\varphi(x_1,...,x_n)=d(t_1,t_2)$. Sean Δ_d,Δ_{t_1} y Δ_{t_2} módulos de continuidad uniforme para d,t_1,t_2 respectivamente.
  Sea $r\in(0,1)$ y $\Delta_\varphi(\epsilon):=\min\limits_{1\leq i\leq 2}\Delta_{t_i}(r\Delta_d(\epsilon))$.

$$\begin{aligned} d((a_1,...,a_n),(a'_1,...,a'_n))<\Delta_\varphi(\epsilon)\Rightarrow d(t_i^{\mathfrak{M}}(a_1,...,a_n),t_i^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n))\leq r\Delta_d(\epsilon)<\Delta_d(\epsilon) \\ \Rightarrow\mid d^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1,...,a_n),t_2^{\mathfrak{M}}(a_1,...,a_n))-d^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n),t_2^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n))\mid<\epsilon \end{aligned}$$

- Supongamos que $\varphi(x_1,...,x_n)=P(t_1,...,t_m)$. Sean $\Delta_P,\Delta_{t_1},...,\Delta_{t_m}$ módulos de continuidad uniforme para $P,t_1,...,t_m$ respectivamente. Sea $r\in(0,1)$ y $\Delta_\varphi(\epsilon):=\min\limits_{1\leq i\leq m}\Delta_{t_i}(r\Delta_d(\epsilon))$. Si

$$d((a_1,...,a_n),(a'_1,...,a'_n))<\Delta_\varphi(\epsilon),$$

  entonces

$$d(t_i^{\mathfrak{M}}(a_1,...,a_n),t_i^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n))\leq r\Delta_d(\epsilon)<\Delta_d(\epsilon),$$

  para todo $i=1,...,m$.

  Como $\Delta_P(\epsilon)$ es un módulo de continuidad uniforme para P, entonces

$$|d^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a_1,...,a_n),t_2^{\mathfrak{M}}(a_1,...,a_n))-d^{\mathfrak{M}}(t_1^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n),t_2^{\mathfrak{M}}(a'_1,...,a'_n))|<\epsilon$$

- Supongamos que $\varphi(x_1,...,x_n)=u(\sigma_1,...,\sigma_m)$ donde $u:[0,1]\to[0,1]$ es uniformemente continua. Por hipótesis de inducción, a cada σ_i con $i=1,...,m$ se le asocia un módulo de continuidad uniforme Δ_{σ_i}. Sean $r\in(0,1)$ y $\Delta_\varphi(\epsilon):=\min\limits_{1\leq i\leq m}\Delta_{\sigma_i}(r\Delta_u(\epsilon))$. Si

$$d((a_1,...,a_n),(a'_1,...,a'_n))<\Delta_\varphi(\epsilon)$$

entonces,
$$|\sigma_i^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) - \sigma_i^{\mathfrak{M}}(a'_1, ..., a'_n)| \leq r\Delta_u(\epsilon) < \Delta_u(\epsilon).$$
Luego, como u es uniformemente continua tenemos que

$$|u(\sigma_1^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n), ..., \sigma_m^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n)) - u(\sigma_1^{\mathfrak{M}}(a'_1, ..., a'_n), ..., \sigma_m^{\mathfrak{M}}(a'_1, ..., a'_n))| \leq \epsilon.$$

- Supongamos que $\varphi(x_1, ..., x_n) = \sup_x \sigma(x)$. Por hipótesis de inducción, para σ hay una función $\Delta_\sigma : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que si

$$d((a_1, ..., a_n), (a'_1, ..., a'_n)) < \Delta_\sigma(\epsilon),$$

entonces,

$$| \sigma^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) - \sigma^{\mathfrak{M}}(a'_1, ..., a'_n) | \leq \epsilon.$$

Por la proposición **1.4**, sabemos que el módulo de continuidad uniforme para $\sigma^{\mathfrak{M}}$ es el mismo que para $(\sup_x \sigma(x))^{\mathfrak{M}}$. Sea $\Delta_\varphi(\epsilon) = \Delta_\sigma(\epsilon)$. Entonces

$$| \sup\{\sigma^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) \mid (a_1, ..., a_n) \in M^n\} - \sup\{\sigma^{\mathfrak{M}}(a'_1, ..., a'_n) | (a'_1, ..., a'_n) \in M^n\} | \leq \epsilon$$

- El caso $\varphi(x_1, ..., x_n) = \inf_x \sigma(x)$ es análogo al anterior.

□

Definición 6.6. Sean $\varphi(x_1, ..., x_n)$ y $\psi(x_1, ..., x_n)$ L-fórmulas. Decimos que son *lógicamente equivalentes* si

$$\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) = \psi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n)$$

para toda L-estructura $\mathfrak{M}$ y para todo $a_1, ..., a_n \in M$. Podemos extender esta definición de la siguiente manera:

$$d(\varphi, \psi) := \sup\{| \varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) - \psi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) \mid \mathfrak{M} \text{ es una } L\text{-estructura y } a_1, ..., a_n \in M\}.$$

Esto define una pseudométrica en la colección de L-fórmulas con variables libres entre $x_1, ..., x_n$. Entonces dos fórmulas son equivalentes si y sólo si $d(\varphi, \psi) = 0$.

Definición 6.7. Una *L-condición* E es una expresión del tipo $\varphi = 0$ donde φ es una L-fórmula. Decimos que E es *cerrada* si φ es una L-sentencia. Si $x_1, ..., x_n$ son variables distintas, escribimos $E(x_1, ..., x_n)$ para indicar que las variables libres de E se encuentran entre $x_1, ..., x_n$. Si E es una $L(M)$-condición de la forma $\varphi(x_1, ..., x_n) = 0$ y $a_1, ..., a_n \in M$ decimos que E es verdad para $a_1, ..., a_n$ si $\varphi(a_1, ..., a_n) = 0$ y lo denotamos por $\mathfrak{M} \models E[a_1, ..., a_n]$.

Definición 6.8. Decimos que E_1 y E_2 son *lógicamente equivalentes* si $\mathfrak{M} \models E_1[a_1, ..., a_n]$ si y sólo si $\mathfrak{M} \models E_2[a_1, ..., a_n]$ para todo $a_1, ..., a_n \in M$.

Notación. $\varphi = \psi$ significa $\mid \varphi - \psi \mid = 0$.

Observación.

1. La función $u : [0,1]^2 \to [0,1]$ definida por $u(t_1, t_2) = \mid t_1 - t_2 \mid$ es un conectivo.
2. Para cada $r \in [0,1]$, r se puede ver como un conectivo y las expresiones de la forma $\varphi = r$ son condiciones para cualquier L-fórmula φ.

Afirmación. La interpretación de la condición $\varphi = \psi$ es semánticamente correcta.

Demostración. Demostración Para toda estructura $\mathfrak{M}$ y $a_1, ..., a_n \in M$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \mid \varphi - \psi \mid = 0 &\Leftrightarrow \mid \varphi - \psi \mid^{\mathfrak{M}} (a_1, ..., a_n) = 0 \\ &\Leftrightarrow \mid \varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) - \psi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) \mid = 0 \\ &\Leftrightarrow \varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) = \psi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n). \end{aligned}$$

□

Definición 6.9. Sea $\dot{-} : [0,1]^2 \to [0,1]$ definida de la siguiente manera:

$$t_1 \dot{-} t_2 := \dot{-}(t_1, t_2) = \text{máx}(t_1 - t_2, 0) = \begin{cases} t_1 - t_2, & \text{si } t_1 > t_2 \\ 0, & \text{si } t_1 \leq t_2 \end{cases}$$

Observaciones.

1. $\varphi \leq \psi$ y $\psi \geq \varphi$ son abreviaciones de la condición $\varphi \dot{-} \psi = 0$
2. La condición $\varphi \leq \psi$ puede ser vista como una colección de implicaciones: $\psi \leq r \Rightarrow \varphi \leq r$ para $r \in [0,1]$

7. Conceptos de teoría de modelos

Definición 7.1. Una *teoría* en un lenguaje L es un conjunto de L-condiciones cerradas. Si T es una teoría en L y $\mathfrak{M}$ es una L-estructura, decimos que $\mathfrak{M}$ es un modelo de T y escribimos $\mathfrak{M} \vDash T$ si $\mathfrak{M} \vDash E$ para toda E en T. $Mod_L(T) := \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \vDash_L T\}$, $Th_L(\mathfrak{M}) := \{E : \mathfrak{M} \vDash_L E\}$

Definición 7.2. Si T es una teoría de la forma $T = Th_L(\mathfrak{M})$ para alguna L-estructura $\mathfrak{M}$ entonces decimos que T es *completa*.

Definición 7.3. Si T es una L-teoría y E es una condición cerrada en L, entonces decimos que E es una *consecuencia lógica* de T y escribimos $T \vDash E$ si $\mathfrak{M} \vDash E$ para todo $\mathfrak{M} \vDash T$.

Definición 7.4. Sean $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ L-estructuras:

(i) Se dice que $\mathfrak{M}$ es *elementalmente equivalente* a $\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$) si $\sigma^{\mathfrak{M}} = \sigma^{\mathfrak{M}}$ para toda L-sentencia (si y sólo si $Th(\mathfrak{M}) = Th(\mathfrak{N})$).

(ii) Si $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ y para toda L-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$, para todo $a_1, ..., a_2 \in M$,

$$\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) = \varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, ..., a_n),$$

entonces decimos que $\mathfrak{M}$ es una *subestructura elemental* de $\mathfrak{N}$ y que $\mathfrak{N}$ es una *extensión natural* de $\mathfrak{M}$.

(iii) Una función F de un subconjunto de M a N es una *función elemental* si

$$\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) = \varphi^{\mathfrak{N}}(F(a_1), ..., F(a_n)),$$

para toda L-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ y para todo $a_1, ..., a_n \in dom(F)$.

(iv) *Una inmersión elemental* de $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$ es una función elemental de $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$ con dominio M.

Observaciones. 1. Toda función elemental preserva distancias.

2. La colección de funciones elementales es cerrada bajo composición y formación de inversos.

3. Todo isomorfismo es una inmersión elemental.

Definición 7.5. Sea S un conjunto de L-fórmulas, decimos que S es *denso con respecto a la distancia lógica* si satisface la siguiente propiedad: Para toda L-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ y para todo $\epsilon>0$, existe $\psi(x_1, ..., x_n)$ en S tal que para cualquier L-estructura $\mathfrak{M}$ y cualesquiera $(a_1, ..., a_n) \in M$ se tiene que

$$|\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) - \psi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n)\ |\leq \epsilon$$

La siguiente proposición es el análogo del criterio de Tarski-Vaught para inmersiones elementales. La demostración es una adaptación rutinaria de la demostración clásica de dicho criterio.

Proposición 7.6 (Tarski-Vaught)**.** *Sea S un conjunto de L-fórmulas denso con respecto a la distancia lógica. Sean $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ L-estructuras, con $\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}$. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. $\mathfrak{M}\preceq\mathfrak{N}$

2. Para cada L-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ en S y para todo $a_1, ..., a_n \in M$ se tiene lo siguiente:

$$\text{ínf}\{\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n, b) \mid b \in N\} = \text{ínf}\{\varphi^{\mathfrak{N}}(a_1, ..., a_n, c) \mid c \in N\}$$

8. Ultraproductos para estructuras métricas

Definición 8.1. Sea X un espacio topológico y $(x_i \mid i \in I) \subseteq X$. Sea $\mathcal{U} \subseteq P(I)$ un ultrafiltro. Escribimos

$$\lim_{i,U} x_i = x$$

y decimos que x es el $\mathcal{U}$*-límite* de $(X_i \mid i \in I)$ si para toda vecindad abierta V de x, $\{i \in I \mid x_i \in V\} \in \mathcal{U}$.

Lema 8.2. *Sea X espacio topológico. Entonces X es Hausdorf y compacto si y sólo si para todo $(x_i \mid i \in I)$ y para todo ultrafiltro $\mathcal{U}$ en I, el $\mathcal{U}$-límite de $(x_i \mid i \in I)$ existe y es único.*

Definición 8.3. Sea $\{M_i, d_i \mid i \in I\}$ una colección de espacios métricos con diámetro menor que k, para algún k fijo. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en I, definimos d de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d : \prod_{i\in I} M_i \times \prod_{i\in I} M_i &\to [0, k] \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \lim_{i,U} d_i(x(i), y(i)) \end{aligned}$$

Luego podemos identificar dos sucesiones

$$x \sim_U y \Longleftrightarrow \lim_{i,U} d(x(i), y(i)) = 0$$

Sea $M = \prod_{i\in I} M_i / \sim_U$. Entonces la psudométrica d induce una métrica en M, a la que denotamos d.

El espacio métrico (M, d) así definido es el *$\mathcal{U}$-ultraproducto* de $(M_i, d_i \mid i \in I)_U$ Cuando todo $(M_i, d_i) = (M, d)$ para algún (M, d), entonces $((M_i, d_i) \mid i \in I)_U := (M, d)_U$ es una *ultrapotencia* de espacios métricos.

9. Ultraproductos de funciones

Proposición 9.1. *Sean $(M_i, d_i \mid i \in I)$ y $(M'_i, d'_i \mid i \in I)$ familias de espacios métricos uniformemente acotados. Sea $(f_i \mid i \in I)$ una familia de funciones n-arias con $f_i : M_i^n \to M_i$ uniformemente continua con módulo de continuidad uniforme Δ para todo $i \in I$. Sea U un ultrafiltro sobre I. La función ultraproducto es:*

$$\left(\prod_{i,U} f_i\right)_U : \left(\left(\prod_{i\in I} M_i\right)_U\right)^n \to \left(\prod_{i\in I} M'_i\right)_U$$

definida de la siguiente manera:

$$\left(\prod_{i,U} f_i\right)_U ((x_i^{(1)} \mid i \in I)_U, ..., (x_i^{(n)} \mid i \in I)_U) = (f_i(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}))_U.$$

Esto define una función uniformemente continua con módulo de continuidad uniforme Δ.

Demostración. Supóngase que

$$d(((x_i^{(1)} \mid i \in I)_U, ..., (x_i^{(n)} \mid i \in I)_U), ((y_i^{(1)} \mid i \in I)_U, ..., (y_i^{(n)} \mid i \in I)_U)) < \Delta(\epsilon).$$

Entonces para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $d((x_i^j \mid i \in I)_U, (y_i^j \mid i \in I)_U) < \Delta(\epsilon)$. Luego para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\lim_{i,U} d_i(x_i^j, y_i^j) < \Delta(\epsilon)$. Esto a su vez implica que para todo $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\{i \in I \mid d_i(x_i^{(j)}, y_i^{(j)}) < \Delta(\epsilon)\} \in U$. Luego tenemos que

$$\{i \in I \mid d_i((x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}), (y_i^{(1)}, ..., y_i^{(n)})) < \Delta(\epsilon)\} \in U,$$

de donde se sigue que

$$\{i \in I \mid d'_i(f_i(x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)}), f_i(y_i^{(1)}, ..., y_i^{(n)})) \leq \epsilon\} \in U.$$

Finalmente, concluimos que

$$d\left(\left(\prod_{i,U} f_i\right)((x_i^{(1)}, ..., x_i^{(n)})_U), \left(\prod_{i,U} f_i\right)((y_i^{(1)}, ..., y_i^{(n)})_U)\right) \leq \epsilon.$$

$\square$

Ejercicio 9.2. *Sea $(M_i \mid i \in I)$ una familia de estructuras métricas. Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en I. Sea $\mathfrak{M} = (M_i \mid i \in I)_U$ y sea $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una L-fórmula. Sean $a_1, ..., a_n \in M$. Si $a_k = (a_i^k \mid i \in I)_U$ son elementos de $\mathfrak{M}$ para $k = 1, ..., n$, entonces*

$$\varphi^{\mathfrak{M}}(x_1, ..., x_n) = \lim_{i,U} \varphi^{\mathfrak{M}_i}(a_i^{(1)}, ..., a_i^{(n)}).$$

Definición 9.3. Sea Σ un conjunto de L-condiciones. Sea $\Sigma^+ = \{\varphi \leq 1/n \mid \text{"}\varphi = 0\text{"} \in \Sigma, n \geq 1\}$.

Ejercicio 9.4. *Sea T una L-teoría y $\mathcal{C}$ una clase de L-estructuras métricas tal que T^+ es finitamente satisfactible en $\mathcal{C}$. Entonces T es satisfactible en $\prod \mathcal{C}$ la clase de todos los ultraproductos de familias en $\mathcal{C}$.*

Definición 9.5. El *carácter de densidad de un espacio topológico X* es la cardinalidad mínima de un subconjunto denso de X.

Convención. De ahora en adelante $\kappa \geq \text{card}(L)$.

El siguiente es la versión continua del Teorema Descendente de Lowenheim-Skolem.

Teorema 9.6. *(Teorema Descendente de Lowenhein-Skolem) Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura métrica basada en (M, d). Sea $A \subseteq M$ con densidad$(A) \leq \kappa$. Entonces existe $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$ tal que*

1. $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$
2. $A \subseteq N \subseteq M$
3. *densidad*$(N) \leq \kappa$

10. Saturación

Definición 10.1. Sea $\Gamma(x_1, ..., x_n)$ una colección de L-condiciones y sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura métrica. Decimos que $\Gamma(x_1, ..., x_n)$ es *satisfactible* en $\mathfrak{M}$ si existen $a_1, ..., a_n \in M$ tales que $\mathfrak{M} \models \Gamma(a_1, ..., a_n)$.

Definición 10.2. Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura métrica. Decimos que $\mathfrak{M}$ es *κ-saturada* si siempre que $A \subseteq M$ es de densidad$(A) \leq \kappa$ y $\Gamma(x_1, ..., x_n)$ es un conjunto de $L(A)$-condiciones si $\Gamma(x_1, ..., x_n)$ es finitamente satisfactible en $(\mathfrak{M}.a)_{a \in A}$, entonces $\Gamma(x_1, ..., x_n)$ es satisfactible en $(\mathfrak{M}.a)_{a \in A}$.

Tal y como es el caso en el contexto de la lógica clásica de primer orden, en la lógica continua para estructuras métricas se satisface la siguiente proposición.

Proposición 10.3. *Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura. Entonces $\mathfrak{M}$ tiene una extensión elemental $\mathfrak{N}$ que es $\kappa -$ saturada.*

Definición 10.4. Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura. Decimos que $\mathfrak{M}$ es *fuertemente κ-homogénea* si cuando $L(C)$ es una extensión de L con $\text{card}(C) < \kappa$ y $f, g : C \to M$ son tal que $(\mathfrak{M}, f(c))_{c \in C} \equiv (\mathfrak{M}, g(c))_{c \in C}$ se tiene que

$$(\mathfrak{M}, f(c))_{c \in C} \cong (\mathfrak{M}, g(c))_{c \in C}.$$

Una vez más, no es difícil demostrar que en el caso de la lógica continua para estructuras métricas persiste la veracidad de la siguiente proposición clásica.

Proposición 10.5. *Sea $\mathfrak{M}$ una L-estructura. $\mathfrak{M}$ tiene una extensión elemental $\mathfrak{N}$ que es $\kappa -$ saturada tal que todo reducto de $\mathfrak{N}$ a un sublenguaje de L es fuertemente κ-homogénea.*

11. Espacio de tipos

Consideremos L un lenguaje fijo, T una L-teoría completa y $\mathfrak{M}$ un modelo T.

Notación. 1. $\mathfrak{M}_A := (\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$

2. $T_A := Th_{L(A)}(\mathfrak{M}_A)$

Observación. Si $\mathfrak{N}_A \models T_A$, entonces $\mathfrak{N}_A \cong (N, a)_{a\in A}$ para algún $\mathfrak{N} \models T$.

Definición 11.1. Sean $x_1, ..., x_n \in V_L$ (distintas). Un conjunto p de $L(A)$-condiciones cuyas variables libres están entre $x_1, ..., x_n$ es un *n-tipo sobre A* si existe un modelo $(\mathfrak{M}, a)_{a\in A} \models T_A$ y existen $e_1, ..., e_n \in M$ tal que p es el conjunto de las $L(A)$-condiciones $E(x_1, ..., x_n)$ para las cuales $\mathfrak{M}_A \models E[e_1, ..., e_n]$. En este caso escribimos $p = tp_{\mathfrak{M}}((e_1, ..., e_n)/A)$ y decimos que $(e_1, ..., e_n)$ realiza a p en $\mathfrak{M}$.

$$S(T_A) = S_n(A) := \{p \mid p \text{ es un } n-tipo \text{ sobre} A\}.$$

Observaciones. 1. $tp_{\mathfrak{M}}((e_1, ..., e_n)/A) = tp_{\mathfrak{M}}((e'_1, ..., e'_n)/A)$ si y sólo si

$$(\mathfrak{M}_A, e_1, ..., e_n) \equiv (\mathfrak{M}_A, e'_1, ..., e'n).$$

2. Si $\mathfrak{M} \preceq \mathfrak{N}$, entonces $tp_{\mathfrak{M}}((e_1, ..., e_n)/A) = tp_{\mathfrak{N}}((e_1, ..., e_n)/A)$; donde $e_1, ..., e_n \in M$ y $A \subseteq M$.

12. La topología lógica

Definición 12.1. Sea $\varphi(x_1, ..., x_n)$ una L-fórmula. Sea $\epsilon > 0$. Entonces

$$[\varphi < \epsilon] = \{q \in S_n(A) \mid \text{ existe } 0 \leq \delta \leq \epsilon \text{ tal que } "\varphi \leq \delta" \in q\}.$$

Si $p \in S_n(A)$, una base de vecindades abiertas de p consiste en $[\varphi < \epsilon]$ para $"\varphi = 0 \in p"$; y para $\epsilon > 0$.

La siguiente proposición ilustra la utilidad e importancia de la topología lógica.

Proposición 12.2. $S_n(T_A)$ *es compacto con respecto a la topología lógica.*

Definición 12.3. Definimos la *d-métrica* en $S_n(A)$ de la siguiente manera:

$$d(p, q) = \text{ínf}\{\max_{1\leq j\leq n} d^{\mathfrak{M}_A}(b_j, c_j) \mid \mathfrak{M}_A \models T_A \ , \mathfrak{M}_A \models p[b_1, ..., b_n] \text{ y } \mathfrak{M}_A \models q[c_1, ..., c_n]\}$$

Proposición 12.4. $(S_n(A), d)$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea $(p_k)_{k\geq 1}$ una sucesión de Cauchy en $(S_n(A), d)$. Sin pérdida de generalidad sea $d(p_k, p_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k}$ para todo $k \geq 1$. Sea $\mathfrak{N}$ un modelo ω-saturado y fuertemente ω-homogéneo de T_A, es decir $\mathfrak{N} = (\mathfrak{M}, a)_{a\in A}$ para algún modelo $\mathfrak{M} \models T$. Sea $\bar{a} \in M^n$ una realización de p_k, entonces existe $\bar{b} \in M^n$ realización de p_{k+1} tal que

$$d(\bar{a}, \bar{b}) = d(p_k, p_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Inductivamente definimos una sucesión $(\bar{b}_k)_{k\geq 1}$ en M^n tal que

$$d(\bar{b}_k, \bar{b}_{k+1}) = d(p_k, p_{k+1}) \leq \frac{1}{2^k}$$

para todo k. □

13. Eliminación de cuantificadores

Definición 13.1. Decimos que $\varphi(x_1, ..., x_n)$ es *aproximable en T por fórmulas libres de cuantificadores* si para todo $\epsilon > 0$ existe una fórmula libre de cuantificadores $\psi(x_1, ..., x_n)$ tal que para todo $\mathfrak{M} \models T$ y para todo $a_1, ..., a_n \in M$ se tiene que

$$|\varphi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n) - \psi^{\mathfrak{M}}(a_1, ..., a_n)| \leq \epsilon.$$

El siguiente criterio para eliminación de cuantificadores es sumamente útil en la práctica. La demostración es una adaptación cuidadosa de la demostración clásica.

Proposición 13.2. *Sea T una L-teoría, los siguientes resultados se satisfacen:*

1. *T admite eliminación de cuantificadores*
2. *Si $\mathfrak{M} \models T$ entonces toda inmersión de una subestructura de $\mathfrak{M}$ a $\mathfrak{N}$ puede ser extendido a una inmersión de una extensión elemental de $\mathfrak{N}$.*

14. Estabilidad

Definición 14.1. Decimos que una teoría T es *λ-estable con respecto a la métrica d* si para todo $\mathfrak{M} \models T$ y $A \subseteq M$ con cardinalidad menor que λ, el conjunto $S_1(A)$ tiene carácter de densidad contenido en A con respecto a la métrica d. Y decimos que T es *estable* si T es λ-estable para algún λ infinito.

15. Estructuras métricas (varias suertes)

Definición 15.1. Una *estructura métrica en varias suertes* consiste en:

i. $((M^{(s)}, d^{(s)}) \mid s \in S)$ familia de espacios métricos completos

ii. Una familia de funciones $F : M^{(s_1)} \times ... \times M^{(s_n)} \to M^{(s_0)}$ uniformemente continua con respecto a la métrica canónica en $F : M^{(s_1)} \times ... \times M^{(s_n)}$ una familia de funciones $P : M^{(s_1)} \times ... \times M^{(s_n)} \to [0, N]$ uniformemente continua.

Nota. Las operaciones cuyo dominio contiene únicamente de la tupla vacía son constantes.

Ejemplos. i. Sea (M, d) un espacio métrico completo y acotado con diámetro 1, entonces hay una suerte en la estructura métrica, la suerte de M, y adicionalmente tenemos el predicado d.

ii. Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach, con suertes $B_n := \{x \in X \mid \|x\| \leq n\}$, $n \in \mathbb{N}$, y equipado con:

(a) Elementos distinguidos $O^{(n)} \in B_n$

(b) Operaciones

$$\begin{aligned}
&+^{(n)} : B_n \times B_n \to B_{2n} \\
&-^{(n)} : B_n \to B_n \\
&f_r^{(n)} : B_n \to B_{([r]+1)_n} \\
&+^{(n)} : B_n \to [0, 2n]
\end{aligned}$$

Definición 15.2. El *lenguaje* L de una estructura métrica

$$\mathfrak{M} = ((M^{(s),d^{(s)}})_{s\in S}, (c_i)_{i\in I}, (F_j)_{j\in I}, (R_k)_{k\in K})$$

consiste en:

i. Un indice de suertes no vacío S.

ii. Simbolos de constante c_i con aridad $\alpha(c_i) = s_0$, para elementos distinguidos en $M^{(s_0)}$.

iii. Símbolos de función f_i con aridad $\alpha(f_i) = (s_1, ..., s_n, s_o)$, para operaciones distinguidas $F_j : M^{s_1} \times ... \times M^{s_n} \to M^{(s_0)}$.

iv. Símbolos de relación P_k con aridad $\alpha(P_k) = (s_1, ..., s_n)$ y rango $I_{P_k} = [0, N]$ para $P_k : M^{s_1} \times ... \times M^{s_n} \to [0, N]$.

v. Para cada $s \in S$, una constante $N_{(s)} \in \mathbb{N}$ indicando una cota superior para el diámetro de $d^{(s)}$.

vi. Para cada simbolo de función f_j, un módulo de continuidad uniforme $\Delta[f_i]$.

vii. Para cada simbolo de relación P_k con rango en [0,M], con un módulo de continuidad uniforme $\Delta(P_k]$.

viii. Un conjunto infinito fijo V_i de variables sorteadas.

ix. Para cada $s \in S$, un símbolo lógico $d^{(s)}$ para la métrica de suerte s.

Ejemplo. El lenguaje de los reticulos de Banach:

1. Una suerte s_n corresponde a la bola cerrada B_n de diámetro n centrada en d, para cada $n \in \mathbb{N}$.

2. Simbolos de constante O_n con aridad $\alpha(O) = s_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

3. Simbolos funcionales:

   - Para cada $mn \in \mathbb{N}$ con $m < n$, un simbolo I_{mn} con aridad $\alpha(I_{mn}) = (s_m, s_n)$, y módulo de continuidad uniforme $\Delta[I_{mn}](\epsilon) = \epsilon$.
   - $\bigvee_n$,$\bigwedge_n$ con aridad (s_n, s_n, s_{2n}) y módulo de continuidad uniforme $\Delta[\bigvee_n](\epsilon) = \Delta[\bigwedge_n](\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$.
   - $+_n, -_n$ con aridad $\alpha(+_n) = (s_n, s_n, s_{2n})$ y $\alpha(-_n) = (s_n, s_n)$ y módulo de continuidad uniforme $\Delta[+_n](\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$ y $\Delta[-_n](\epsilon) = \epsilon$.
   - Para $n \in \mathbb{N}$ y dado $k < \lambda < k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}$, λ_n con aridad $\alpha(\lambda_n) = (s_n, s_{(k+1)n})$ y $\Delta[\lambda_n](\epsilon) = \frac{\epsilon}{k+1}$.
   - Para cada $n \in \mathbb{N}$,un símbolo relacional $\|.\|^{(n)}$ con aridad (s_n) y $\Delta[\|.\|^{(n)}](\epsilon) = \epsilon$.
   - $d^{(n)} : B_n \times B_n \to [0, 2n]$ símbolo lógico con $d_n(f, g) = \|f - g\|$.

16. Axiomas para retículos de Banach

Nota. Los axiomas ecuacionales de la forma $\forall\overline{x}...(t = s)$, donde t y s on términos y $\overline{x}$ es una n-tupla que contiene todas las variables libres que aparecen en t o s, en lógica continua se expresan de la siguiente forma: $sup_x d(t,s) = 0$

Notación. $\|x\|_n$ denota al término $(x \vee_n O_n) +_{2n} ((-1)_n x \vee_n O_n)$

1. Para cada $m, n, p \in \mathbb{N}$ con $m < n < p$ el axioma

$$\sup_x d^{(p)}(I_{m,p}(x), I_{n,p}(I_{m,n}(x))) = 0$$

(donde x es una variable de suerte m), que garantiza una compatibilidad fundamental entre las funciones inclusión $I_{m,n}$.

2. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, el axioma

$$d^{(n)}(0^{(n)}, I_{m,n}(0^{(m)})) = 0.$$

3. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, el axioma

$$\sup_x \mid d^{(m)}(x, 0^{(m)}) - d^{(n)}(I_{m,n}(x), 0^{(n)}) \mid = 0$$

(donde x es una variable de suerte m).

4. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, el axioma

$$\sup_x \sup_y |d^{(m)}(x,y) - d^{(n)}(I_{m,n}(x), I_{m,n}(y))| = 0$$

(donde x and y son variables de suerte m).

5. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, el axioma

$$\sup_x \, d^{(n)}(I_{m,n}(-_m x), +_n(-1)_n(I_{m,n}(x))) = 0$$

(donde x es una variable de suerte m).

6. Para cada λ con $k - 1 < \lambda \leq k$ para algún $k \geq 1$, y para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, el axioma

$$\sup_x \, d^{(kn)}(I_{km,kn}(\lambda_m x), \lambda_n I_{m,n}(x)) = 0$$

(donde x es una variable de suerte m).

7. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, el axioma

$$\sup_x \sup_y \, d^{(2n)}(I_{m,n}(x) +_n I_{m,n}(x), I_{2m,2n}(x +_m y)) = 0$$

(donde x and y son variables de suerte m).

8. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, el axioma

$$\sup_x \sup_y \ d^{(2n)}(I_{m,n}(x) \vee_n I_{m,n}(x), I_{2m,2n}(x \vee_m y)) = 0$$

(donde x and y son variables de suerte m).

9. Para cada $m, n \in \mathbb{N}$ con $m < n$, el axioma

$$\sup_x \sup_y \ d^{(2n)}(I_{m,n}(x) \wedge_n I_{m,n}(x), I_{2m,2n}(x \wedge_m y)) = 0$$

(donde x and y son variables de suerte m).

10. Axiomas de espacios vectoriales: Para una lista completa de axiomas para espacios vectoriales se dirige al lector a [3, pág. 49]. Todos los aximoas de primer orden de espacios vectoriales son axiomas ecuacionales[1].

11. Axiomas de retículos vectoriales: De nuevo, los axiomas de primer orden de retículos vectoriales son axiomas ecuacionales. He aquí una lista exhaustiva:

    a) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
    b) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$;
    c) $x \wedge y = y \wedge x$;
    d) $x \vee y = y \vee x$;
    e) $x \wedge x = x$;
    f) $x \vee x = x$;
    g) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$;
    h) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$;
    i) $(x \wedge y) \vee y = y$;
    j) $(x \wedge y) + z = ((x \wedge y) + z) \wedge (y + z)$;
    k) $(\lambda(x \wedge y) \wedge \lambda x = \lambda(x \wedge y))$ para cada $\lambda > 0$.

    Como cada uno de estos axiomas es un axioma ecuacional, es fácil expresarlos en la lógica continua para estructuras métricas.

12. Axiomas que garantizan que $\|\cdot\|^{(n)}$ es la restricción de una seminorma a la suerte B_n compatible con las operaciones $+_n$, $-_n$, yu λ_n para toda $\lambda \in \mathbb{R}$. Nótese que no se puede expresar, en la lógica continua, la implicación $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$. Sin embargo, la condición $\|x\| = d(x, 0)$, junto con el requerimiento metalógico de que that d sea una métrica, garantiza que la seminorma $\|\cdot\|$ es en efecto una norma.

[1] A manera de ilustración, considérese el axioma

$$\forall x \forall y \quad x + y = y + x.$$

En la lógica continua, este axioma se lo puede expresar por medio de una familia infinita de axiomas

$$\sup_x \sup_y \ d^{(2n)}(x +_n y, y +_n x) = 0$$

indizada por $n \in \mathbb{N}$.

13. Para cada $m \in \mathbb{N}$, los axiomas

$$\sup_x \sup_y \left| d^{(m)}(x,y) - \|x -_m y\|^{(2m)} \right| = 0$$

(donde x and y son variables de suerte m).

14. Para cada $n \in \mathbb{N}$, los axiomas

$$\sup_x \ \left| \, \| |x|_n \|^{(4n)} - \|x\|^{(n)} \, \right| = 0$$

y

$$\sup_x \sup_y \ \left| \, \text{mín}(\| |x|_n \wedge_{4n} |y|_n \|^{(8n)}, \|x\|^{(n)}) - \| |x|_n \wedge_{4n} |y|_n \|^{(8n)} \, \right| = 0$$

(donde x and y son variables de suerte n). La colección de todos estos axiomas (para $n \in \mathbb{N}$) garantiza que $\| \cdot \|$ es una norma compatible con la estructura reticular.

17. Retículos de Banach L_p

Definición 17.1. Sea Ω un conjunto, Σ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y μ una medida σ-aditiva en Σ, sea $p \in [1, \infty)$, definimos

$$L_p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{[f] \mid f : \Omega \to \mathbb{R} \text{ medible con } \|f\| := \left(\int_\Omega |f(w)|^p d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

donde $[f] = [g] \iff_\mu (\{w \in \Omega \mid f(w) \neq g(w)\}) = 0$.

Nota. Consideremos a $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ como un retículo de Banach sobre $\mathbb{R}$ de la forma usual, en particular, las operaciones de retículo $\wedge$, $\vee$ están dados por el máximo y mínimo punto a punto.

Consideremos estructuras de la forma

$$((B_n \mid n \geq 1), O_n, \{I_{mn}\}_{m<n}, \{\lambda_n\}_{n \geq 1, \lambda \in \mathbb{Q}^+}, +_n, -_n, \wedge_n, \vee_n, \|.\|_n)$$

donde $B_n = B_n(L_p(\Omega, \Sigma, \mu)) = \{f \in L_p(\Omega, \Sigma, \mu) \mid \|f\| \leq n\}$ y $I_{mn} : B_m \to B_n$ es la función inclusión para $m < n$.

- La métrica en B_n está dada por $d(f, g) = \|f - g\|_m$
- El diámetro de B_n es $2n$ y los valores del predicado $\| \cdot \|_n$ en B_n están en $[0, n]$.
- Las operaciones $+_n, -_n, \wedge_n, \vee_n$ definidas en B_{2n} y dominio en B_n para $\lambda_n \in \mathbb{R}$ con $k-1 < |\lambda_n| \leq k$, donde $k \geq 1$, la operación $\lambda_n : B_n \to B_{Rn}$.
- Los módulos de continuidad uniforme para la norma y las funciones inlusión I_{mn} estan dadas por $\Delta(\epsilon) = \epsilon$.
- Los módulos de continuidad uniforme para $+_n, -_n, \wedge_n, \vee_n$ están dados por $\Delta`(\epsilon) = \frac{\epsilon}{2}$.
- Para $k - 1 < |\lambda_n| \leq k$ donde $k \geq 1$ el módulo de continuidad uniforme está dado $\Delta_\lambda(\epsilon) = \frac{\epsilon}{k}$.

Los axiomas para la teoría de los retículos de Banach L_p consisten en una lista (infinita) de L-ecuaciones que expresan los siguientes enunciados.

1. $\|x \vee y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p \leq \|x + y\|^p$
2. $\||x| \vee |y|\|^p \leq \||x|\|^p + \||y|\|^p \leq \||x| + |y|\|^p$

Nótese que los enunciados arriba descritos no están estrictamente descritos en el lenguaje apropiado. Como ejercicio al lector, sugerimos escribir la colección de axiomas que expresa dichos enunciados.

18. Análisis y probabilidades

Definición 18.1. Un espacio de medida (Ω, Σ, μ) es *estrictamente localizable* si existe una partición $\{\Omega_i \mid i \in I\} \subseteq \Sigma$ de Ω tal que $\mu(\Omega_i) < \infty$ para todo $i \in I$ y tal que para todo $A \subseteq \Omega$ se tiene lo siguiente:

(i) $A \in \Sigma$ si y sólo si $A \cap \Omega_i \in \Sigma$ para todo $i \in I$ y

(ii) Si $A \in \Sigma$, entonces $\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu(A \cap \Omega_i) = \sup\{\sum_{i \in F} \mu(A \cap \Omega_i) \mid F \subseteq I \text{ y } F \text{ es finito}\}$

Convención. Todos los espacios de medida son estrictamente localizables. Dicha convención es justificada por el hecho de que si se tiene $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$, entonces existe (Ω', Σ', μ') estrictamente localizable tal que $L_p(\Omega, \Sigma, \mu) \cong L_p(\Omega', \Sigma', \mu')$.

Teorema 18.2 (Teorema de Representación de Retículos L_p Abstractos)**.** *Sea X un retículo de Banach y $p \in [1, \infty)$. Supongamos que para todo x, y se satisface lo siguiente:*

$$\||x| \wedge |y|\|^p \leq \||x|\|^p + \||y|\|^p \leq \||x| + |y|\|^p.$$

X con esta propiedad se dice es un retículo L_p abstracto. *X es* isómetricamente isomorfo *a $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ para algún (Ω, Σ, μ) estrictamente localizable.*

19. Teoría de modelos de los retículos de Banach L_p

- **Axiomas:** Axiomas de retículos de Banach.

$$\||x| \wedge |y|\|^p \leq \||x|\|^p + \||y|\|^p \leq \||x| + |y|\|^p$$

Proposición 19.1. *(Axiomatizabilidad) Si L_p denota la teoría de los retículos de Banach mas el anterior axioma, entonces*

$$\mathfrak{M} \models L_p \textit{ si y sólo si existe } (\Omega, \Sigma, \mu) \textit{ espacio de medida tal que } \mathfrak{M} \cong L_p(\Omega, \Sigma, \mu).$$

Definición 19.2. Sea $(\Omega, \Sigma, k\mu)$ un espacio de medida. Un conjunto $S \in \Sigma$ es un *átomo* si $\mu(S) > 0$ y no existe $S' \subseteq S$, $S' \in \Sigma$ y $0 < \mu(S') < \mu(S)$.

El siguiente axioma adicional dice que no hay átomos:

$$\sup_x(\inf_y(\max(|\|y\| - \|x^+ - y\||, \|y \wedge (x^+ - y)\|))) = 0.$$

Definición 19.3. Si $x \in X$ (retículo de Banach), una *componente* de x es $y \in X$ tal que $|y| \wedge |x-y| = 0$. Sean

$$\mathcal{C}_p := \{X \mid X \text{ es un retículo de Banach y existe } (\Omega, \Sigma, \mu) \text{ tal que } X \cong L_p(\Omega, \Sigma, \mu)\}$$

y

$$\mathcal{AC}_p := \{X \mid X \in \mathcal{C}_p \text{ tal que } X \text{ no tiene átomos}\}$$

Proposición 19.4.

- *$\mathcal{AC}_p$ admite eliminación de cuantificadores.*
- *$\mathcal{AC}_p$ es ω-estable.*

20. Retículos de Orlicz

Definición 20.1. Sea E un retículo de Banach y $\Theta : E \to [0, \infty)$. Se dice que Θ es un *funcional modular convexo* si

(M1) $\Theta(f) = 0$ si y sólo si $f = 0$

(M2) $|f| \leq |g|$ entonces $\Theta(f) \leq \Theta(g)$

(CM) $(\alpha f + (-\alpha)g) \leq \alpha\Theta(f) + (-\alpha)\Theta(g)$

(DA) $|f| \wedge |g| = 0$ entonces $\Theta(f + g) = \Theta(f) + \Theta(g)$

Para todo $f, g \in E, \alpha \in [0, 1]$.

Lema 20.2. *Para todo $f, g \in E, a \in (0, 1]$,*

$$\Theta(f) \leq \Theta(g) + \frac{a}{2}\left(\Theta(2g) + \Theta\left(\frac{2}{a}(f - g)\right)\right).$$

Demostración. Nótese que

$$\begin{aligned}
\Theta(f) &= \Theta(((1-a)g) + \frac{a}{2}(2g + \frac{2}{a}(f-g))) \\
&\leq (1-a)\Theta(g) + a\Theta(\frac{1}{2}(2g) + \frac{1}{2}(\frac{2}{a}(f-g))) \\
&\leq (1-a)\Theta(g) + \frac{a}{2}\left(\Theta(2g) + \Theta\left(\frac{2}{a}(f-g)\right)\right).
\end{aligned}$$

□

Nota. En consecuencia $|\Theta(f) - \Theta(g)| \leq \frac{a}{2}(\max(\Theta(2f), \Theta(2g)) + \Theta(\frac{2}{a}(f - g)))$.

Proposición 20.3. $t \longmapsto \Theta(tf) : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *es continua para toda $f \in E$.*

Definición 20.4. $\|f\|_\Theta := \inf\{t \in (0,\infty) | \Theta(\frac{f}{t}) \leq 1\}$

Definición 20.5. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un retículo de Orlicz. Si Θ es un modular convexo en E, decimos que (E,Θ) es un retículo modulado de Banach si Θ induce la norma $\|\cdot\|$ en E, es decir si

$$\|x\| = \inf\{\epsilon > 0 | \Theta(\frac{x}{\epsilon}) \leq 1\}$$

para todo $x \in E$. Si X es completo, (X,Θ) es un *retículo de Orlicz.*

Ejemplos.

- En lógica de primer orden para todo $x\Theta(x) < \Delta(\epsilon)$, entonces $\|x\| \leq \epsilon$.
- En lógica continua $(\sup_x \min(\Delta(\epsilon) \dot{-} \Theta(x), \|x\| \dot{-} \epsilon)) = 0$
- $\varphi(t) = |t|^p$; $\varphi'(t) = \alpha|t|^p + (1-\alpha)|t|^q$ con $\alpha \in [0,1]$. $L_\varphi(\Omega,\Sigma,\mu) := \{f | fes\Sigma - medible$ y $\Phi(f) := \int_\Omega \varphi(f(\omega))d\mu(\omega) < \infty\}$. Este es un espacio de Orlicz.

Observaciones.

- Para $k \geq 2$ el modular convexo Θ en E satisface la condición Δ_2^k si $\Theta(2f) \leq k\Theta(f)$ para todo $f \in E$. Si Θ satisface la condición Δ_2^k para algún $k \geq 2$, decimos que Θ satisface la condición Δ_2
- Sea $n \geq 1$ y sea $B_n = \{f \in E \mid \|f\| \leq n\}$. Sea $\epsilon > 0$ para cualquier $g \in B_n$ tenemos que

  $$\Theta(g) = \Theta(\frac{ng}{n}) \leq k^{[\lg_2(n)]+1}\Theta(\frac{g}{n}) \leq k^{[\lg_2(n)]+1}.$$

  Escójase $a \in (0,1)$ lo suficientemente pequeño para que

  $$\frac{ak}{2}(f_k[\lg(n)] + 1) \leq \epsilon$$

  Sea $\Delta_k^{(n)}(\epsilon) = a$. Entonces $\|f - g\|_\Theta < \Delta_k^{(n)}(\epsilon)$, y luego

  $$|\Theta(f) - \Theta(g)| \leq \frac{ak^{[\lg(n)]+1}}{2} + \frac{ak}{2}\Theta(\frac{f-g}{2}) \leq \epsilon$$

  y $\Delta_k^n : (0,1] \to (0,1]$ es un módulo de continuidad uniforme para Θ en B_n.

  Lo anterior demuestra que si $L^{mod} = L \cup \{\Theta^n \mid n \geq 1\}$ entonces los retículos de Orlicz son L^{mod}-estructutras.

21. Axiomas para retículos de Orlicz con la condición Δ_2^k

- Axiomas de Retículos de Banach.
- Axiomas que capturen las condiciones (M1), (M2), (CM), y (DA) (ver definición de un modular convexo)

Ejemplo.

- Para todo $x\Theta^{(n)}(x) < \Delta_k^{(n)}(\epsilon)$, entonces $\|x\|^{(n)} \leq \epsilon$.

- $(\sup_x \min(\Delta_k^{(n)}(\epsilon)\dot{-}\Theta^{(n)}(x), \|x\|^{(n)}\dot{-}\epsilon)) = 0$.

Definición 21.1. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Una función $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ es una *función de Orlicz* si $\varphi(0) = 0, \varphi(1) = 1$ y φ es convexa y continua. Dado $k \geq 2$, si $\varphi(2t) \leq k\varphi(2t)$ para todo $t \in [0, \infty)$, decimos que φ satisface la condición Δ_2^k.

Definición 21.2. Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida. Una función de *Musielar-Orlicz* en (Ω, Σ, μ) es una función $\psi : [0, \infty) \times \Omega \to [0, \infty)$ tal que

(i) $\psi(t, \cdot)$ es medible en Σ para todo t.

(ii) $\psi(\cdot, \omega)$ es una función de Orlicz para todo $\omega \in \Omega$.

Defínase, adicionalmente, los siguientes objetos:

- $\Psi(f) = \int_\Omega \Psi(|f(\omega)|, \omega) d\mu(\omega)$
- $\|f\|_\Psi := \inf\{\epsilon \in [0, \infty) \mid \Psi(\frac{f}{\epsilon}) \leq 1\}$
- $L_\Psi(\Omega, \Sigma, \mu) := \{f \in L_0(\Omega, \Sigma, \mu) \mid \|f\|_\Psi < \infty\}$ $L_\Psi(\Omega, \Sigma, \mu)$ equipado con la estructura de retículo es un retículo de Banach modulado con módulo Ψ, es decir es un retículo de Orlicz.

Nota. $k \geq 2$ fijo. Todos los espacios de Musielar-Orlicz satisfacen en adelante la condición Δ_2^k.

Ejemplos. 1. $\psi(t, \omega) := |t|^p$ para todo t y todo ω con $p \geq 1$

2. $\psi(t, \omega) := \varphi(t)$ para todo t y todo ω, donde φ es una función de Orlicz.

3. $\psi(t, \omega) := \alpha|t|^p \chi_A(\omega) + \beta|t|^q \chi_{A^c}(\omega)$ $\alpha + \beta = 1$ y para todo $\alpha, \beta \in [0, 1]$

4. $\psi(t, \omega) := \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i |t|^{p_i} \chi_{A_i}(\omega)$, donde $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = 1$; $p_i \geq 1$ para todo i y $\bigcup\limits_{i=1}^n A_i = \Omega$

5. $\psi(t, \omega) := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n |t|^{p_n} \chi_{A_n}(\omega)$, donde $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = 1$; $p_n \geq 1$ y $\bigcup\limits_{n=1}^\infty A_n = \Omega$

6. $\psi(t, \omega) := |t|^{p(\omega)}$ donde $p(\cdot) : \Omega \to [0, \infty)$ satisface $\inf\{p(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \geq 1$ y $\sup\{p(\omega) \mid \omega \in \Omega\} \leq B \leq \infty$

En el caso [(vi)] decimos que L_ψ es un *espacio de Nakano*, y escribimos $L_{p(\cdot)}$ en lugar de L_ψ.

Definición 21.3. El rango esencial de un espacio de Nakano con exponente aleatorio $p(\cdot)$ está dado por

$$R_{p(\cdot)} := \{p \in [1, \infty) \mid \text{ para todo} \epsilon > 0 \mu(\{\omega \in \Omega \mid p(\omega) \in (p - \epsilon, p + \epsilon)\}) > 0\}.$$

Nota. El rango esencial de un espacio de Nakano es invariante bajo isometría.

Para un subconjunto compacto (es decir, cerrado y acotado) K de $\mathbb{R}$, defínase

$$\mathcal{N}_K := \{L_{p(\cdot)}(\Omega, \Sigma, \mu) \mid \text{rango esencial de } p(\cdot) = K\}.$$

Concluimos estas notas enunciando dos resultados recientes sobre algunas de las clases arriba descritas.

- $\mathcal{N}_K$ es axiomatizable en la lógica continua para estructuras métricas. (Es interesante notar aquí que la demostración original de este resultado es indirecta: se demostró que la clase es cerrada bajo isometría, ultraproductos y ultrarraíces. Más adelante, se ha logrado encontrar una lista exhaustiva de los axiomas de dicha clase.)
- Si se admiten símbolos unarios de relación cuyas interpretaciones son restricciones (a las suertes canónicas) del modular $\Theta_{p(\cdot)}$, entonces la clase $\mathcal{AN}_K$ admite eliminación de cuantificadores y es estable.

Referencias

[1] I. Ben Yaacov. Modular Functionals and Perturbations of Nakano Spaces, submitted; available at `http://math.univ-lyon1.fr/~begnac/papers.html`.

[2] I. Ben-Yaacov, A. Berenstein, C. W. Henson, and A. Usvyatsov. Model theory for metric structures, submitted; available at `http://www.math.uiuc.edu/~henson`.

[3] H. D Ebbinghaus, J. Flum, and W. Thomas. *Mathematical Logic*. Springer, 1996.

[4] C. W. Henson and J. Iovino. Ultraproducts in analysis. In *Analysis and Logic*, number 262 in London Mathematical Society Lecture Notes Series, pages 1–113. Cambridge University Press, 2003.

[5] L. P. Poitevin. *Model Theory of Nakano Spaces*. PhD thesis, University of Illinois at Urbana-Champaign, 2006.

[6] L. P. Poitevin and Y. Raynaud. Positive contractive projections in Nakano spaces, submitted; available online at `http://salemstate.edu/~lpoitevin/interests.html`.